TSI – C01 – Activité 1 – Rappels de mathématiques utiles pour la physique-chimie

A. Dérivées

La notation utilisée en mathématiques au Lycée pour la dérivée n'est pas adaptée à la physique, où les fonctions peuvent adopter des variables différentes.

$$f' = \frac{df}{dx}$$

$\frac{df}{dx}$ se lit donc « dérivée de f par rapport à x ».

Lorsque la fonction admet pour variable « t », sa dérivée s'écrit donc : $\frac{df}{dt}$ et se lit « dérivée de f par rapport à t ».

On rappelle que si : $f(x) = ax^2 + bx + c$ alors :

$$\frac{df}{dx}(x) = 2ax + b$$

D'autre part si : $f(x) = e^{\alpha x}$

$$\frac{df}{dx}(x) = \alpha e^{\alpha x}$$

Et plus généralement,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_n \cdot x^n \Longrightarrow \frac{df}{dx}(x) = \sum_{i=0}^{n} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$$

$$\frac{d(f+g)}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$$

Exercice : Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$f(x) = \alpha x^2 + \frac{\zeta}{2}x + \Pi$

$f(t) = -g \cdot t + z$

$f(t) = a \cdot t^2 \cdot x + b \cdot t$

$f(t) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{g \cdot \sin^2(\alpha)}{v_0^2 \cdot h}$

$h(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$

$A(t) = A_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

B. Primitives

En physique, il est souvent nécessaire de déterminer quelles fonctions pourraient avoir comme dérivée une fonction connue. Cette opération s'appelle intégration et permet de trouver **une** primitive à la fonction connue.

Exercice : Trouver l'expression de f telle que :

$\frac{df(t)}{dt} = \alpha \cdot x + \beta$

$\frac{df(t)}{dt} = \tau$

$\frac{df(t)}{dt} = k \cdot e^{-\frac{t}{a}}$

C. Vecteurs

En mécanique, les vecteurs permettent de décrire le mouvement et les forces. On rappelle qu'un vecteur est un objet définit par 3 caractéristiques : sa direction, son sens, et sa norme.

La norme d'un vecteur est toujours positive et admet une unité

NB : un vecteur et un nombre sont deux concepts différents. Il est impossible d'écrire : $\vec{g} = g$.

En mécanique en terminale, on travaille usuellement dans un repère orthonormé, souvent nommé $(Oxyz)$. Ce repère admet trois vecteurs unitaires de base dont les coordonnées sont :

$$\overrightarrow{u_x}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} ; \overrightarrow{u_y}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} ; \overrightarrow{u_z}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix};$$

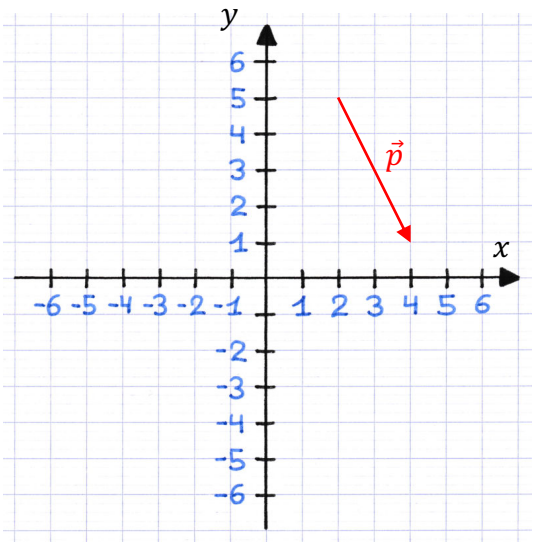
Donner les coordonnées d'un vecteur dans une base revient à donner sa décomposition sur les vecteurs de cette base :

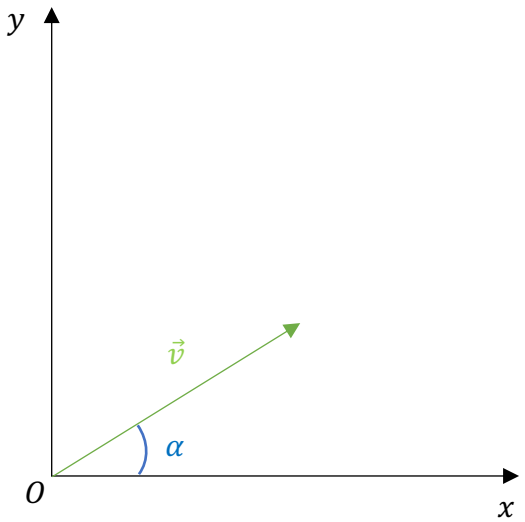
$$\vec{v}\begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{v} = v_x \cdot \vec{u}_x + v_y \cdot \vec{u}_y + v_z \cdot \vec{u}_y$$

La norme d'un vecteur dans un repère $(Oxyz)$ peut être calculée à partir des valeurs des normes de vecteurs sur chacun des axes par simple application du théorème de Pythagore :

$$\|\vec{v}\| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Exercice : Exprimer les coordonnées des vecteurs ci-dessous :





TSI – C01 – Activité 1 – Correction

Exercice I

$\frac{df}{dx}(x) = 2\alpha x + \frac{\zeta}{2}$

$\frac{df}{dt}(t) = -g$

$\frac{df}{dt}(t) = 2 \cdot a \cdot t \cdot x + b$

$\frac{df}{dt}(t) = 0$

$\frac{dh}{dt}(t) = -g \cdot t$

$A(t) = A_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \mathrm{A_0} - \mathrm{A_0} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{t}}{\tau}} \Leftrightarrow \frac{dA}{dt}(t) = \frac{A_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau}$

Exercice II

$f(t) = \frac{\alpha \cdot x^2}{2} + \beta x + C$ (C est une constante d'intégration)
$f(t) = \tau \cdot t + C$
$f(t) = -k \cdot a \cdot e^{-\frac{t}{a}}$

Exercice III

$\vec{p}\begin{pmatrix} p_x = 2 \\ p_y = -4 \end{pmatrix}_{(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y)}$

$\vec{v}\begin{pmatrix} v_x = v \cdot \cos(\alpha) \\ v_y = v \cdot \sin(\alpha) \end{pmatrix}_{(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y)}$