Retournement de formules : exprimer une grandeur — MÉTHODE 4

Objectifs : Isoler une grandeur • Opérations inverses • Développer et factoriser • Rigueur

A. La méthode

Principe

Exprimer une grandeur en fonction des autres, c'est l'isoler seule d'un côté du signe $=$. On y parvient en appliquant la *même* opération aux deux membres de l'égalité, en défaisant les opérations dans l'ordre inverse de celui du calcul (les dernières effectuées sont défaites en premier).

Opérations inverses

addition $+$	$\longleftrightarrow$	soustraction $-$	$\ln(x)$	$\longleftrightarrow$	e^x
multiplication $\times$	$\longleftrightarrow$	division $\div$	$\log(x)$	$\longleftrightarrow$	10^x
carré x^2	$\longleftrightarrow$	racine carrée $\sqrt{x}$	$\sin(x)$	$\longleftrightarrow$	$\arcsin(x)$

Exemple 1 : *On veut exprimer I à partir de $U = R \times I$. On divise les deux membres par R :*

$$\frac{U}{R} = \frac{R \times I}{R} \quad \Longrightarrow \quad I = \frac{U}{R}$$

Exemple 2 : *On veut exprimer v à partir de $E_c = \frac{1}{2} \times m \times v^2$.*

$$2 \times E_c = m \times v^2 \qquad \text{(on multiplie par 2)}$$
$$\frac{2 \times E_c}{m} = v^2 \qquad \text{(on divise par } m\text{)}$$
$$v = \sqrt{\frac{2 \times E_c}{m}} \qquad \text{(on prend la racine carrée)}$$

Exemple 3 : développer, factoriser : *Quand la grandeur cherchée apparaît plusieurs fois, on développe, on regroupe les termes qui la contiennent d'un même côté, puis on factorise. On veut exprimer x à partir de $y = \frac{x}{x+a}$.*

$$y \times (x + a) = x \qquad \text{(on multiplie par } x + a\text{)}$$
$$y \times x + y \times a = x \qquad \text{(on développe)}$$
$$y \times a = x - y \times x \qquad \text{(on regroupe les termes en } x\text{)}$$
$$y \times a = x \times (1 - y) \qquad \text{(on factorise)}$$
$$x = \frac{y \times a}{1 - y} \qquad \text{(on divise par } 1 - y\text{)}$$

Consignes : *Dans chaque exercice, exprimer la ou les grandeurs demandées en fonction des autres, sans calcul numérique. Les grandeurs sont strictement positives, sauf mention contraire. Certains exercices nécessitent de développer ou de factoriser. Lorsque deux grandeurs sont demandées, les exprimer séparément, à partir de la formule de départ. Les exercices sont classés par niveau (2nde, 1ère, Tle), puis par difficulté croissante (étoiles). La réponse est écrite à l'envers en bas de chaque exercice.*

B. Niveau 2nde

Exercice 1 – Loi d'Ohm ★☆☆

$$U = R \times I$$

Loi d'Ohm : tension U, résistance R, intensité I.
Exprimer R en fonction des autres grandeurs.

Réponse : $R = \frac{U}{I}$

Exercice 2 – Quantité de matière ★☆☆

$$n = \frac{m}{M}$$

Quantité de matière n, masse m, masse molaire M.
Exprimer M en fonction des autres grandeurs.

Réponse : $M = \frac{m}{n}$

Exercice 3 – Vitesse ★☆☆

$$v = \frac{d}{\Delta t}$$

Vitesse v, distance parcourue d, durée Δt.
Exprimer Δt en fonction des autres grandeurs.

Réponse : $\Delta t = \frac{d}{v}$

Exercice 4 – Concentration ★☆☆

$$C = \frac{n}{V}$$

Concentration C, quantité de matière n, volume de solution V.
Exprimer V en fonction des autres grandeurs.

Réponse : $V = \frac{n}{C}$

Exercice 5 – Énergie et puissance ★☆☆

$$E = P \times \Delta t$$

Énergie E, puissance P, durée Δt.
Exprimer P en fonction des autres grandeurs.

Réponse : $P = \frac{E}{\Delta t}$

Exercice 6 – Mouvement rectiligne uniforme ★☆☆

$$x = x_0 + v \times t$$

Mouvement rectiligne uniforme : position x, position initiale x_0, vitesse v, date t.
Exprimer t en fonction des autres grandeurs.

Réponse : $t = \frac{x - x_0}{v}$

Exercice 7 – Longueur d'onde et fréquence ★☆☆

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

Longueur d'onde λ, célérité c, fréquence ν.
Exprimer ν en fonction des autres grandeurs.

Réponse : $\nu = \frac{c}{\lambda}$

Exercice 8 – Dilution ★★☆

$$C_f = \frac{C_i\, V_i}{V_f}$$

Dilution : concentrations initiale C_i et finale C_f, volumes initial V_i et final V_f.
Exprimer V_f en fonction des autres grandeurs.

Réponse : $V_f = \frac{C_i\, V_i}{C_f}$

Exercice 9 – Loi de Snell-Descartes ★★☆

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

Loi de Snell-Descartes : indices de réfraction n_1 et n_2, angles θ_1 et θ_2.
Exprimer θ_2 en fonction des autres grandeurs.

Réponse : $\theta_2 = \arcsin\left(\frac{n_1 \sin\theta_1}{n_2}\right)$

Exercice 10 – Dilution par ajout d'eau ★★★

$$C_f\,(V_i + V_{eau}) = C_i\, V_i$$

Dilution par ajout d'un volume d'eau V_{eau} : concentrations C_i et C_f, volume prélevé V_i.
Exprimer V_i en fonction des autres grandeurs.

Réponse : $V_i = \frac{C_f\, V_{eau}}{C_i - C_f}$

C. Niveau 1ère

Exercice 11 – Générateur ★☆☆

$$U = E - r \times I$$

Générateur : tension U à ses bornes, force électromotrice E, résistance interne r, intensité I.
Exprimer r en fonction des autres grandeurs.

Réponse : $r = \frac{E - U}{I}$

Exercice 12 – Mouvement uniformément accéléré ★☆☆

$$v = v_0 + a \times t$$

Mouvement uniformément accéléré : vitesse v, vitesse initiale v_0, accélération a, date t.
Exprimer a en fonction des autres grandeurs.

Réponse : $a = \frac{v - v_0}{t}$

Exercice 13 – Énergie cinétique ★★☆

$$E_c = \frac{1}{2}\, m\, v^2$$

Énergie cinétique E_c, masse m, vitesse v.
Exprimer v en fonction des autres grandeurs.

Réponse : $v = \sqrt{\frac{2\,E_c}{m}}$

Exercice 14 – Gaz parfait ★★☆

$$P\,V = n\,R\,T$$

Gaz parfait : pression P, volume V, quantité de matière n, constante R, température T.
Exprimer T en fonction des autres grandeurs.

Réponse : $T = \dfrac{P\,V}{n\,R}$

Exercice 15 – Interaction gravitationnelle ★★☆

$$F = G\,\frac{m_A\,m_B}{d^2}$$

Interaction gravitationnelle : force F, constante G, masses m_A et m_B, distance d entre les centres.
Exprimer d en fonction des autres grandeurs.

Réponse : $d = \sqrt{\dfrac{G\,m_A\,m_B}{F}}$

Exercice 16 – Énergie d'un photon ★★☆

$$E = \frac{h\,c}{\lambda}$$

Énergie E d'un photon, constante de Planck h, célérité c, longueur d'onde λ.
Exprimer λ en fonction des autres grandeurs.

Réponse : $\lambda = \dfrac{h\,c}{E}$

Exercice 17 – Circuit série ★★☆

$$I = \frac{E}{R + r}$$

Circuit série : intensité I, force électromotrice E, résistance R du conducteur ohmique, résistance interne r.
Exprimer R en fonction des autres grandeurs.

Réponse : $R = \dfrac{E}{I} - r$

Exercice 18 – Mouvement accéléré ★★★

$$v^2 - v_0^2 = 2\,a\,(x - x_0)$$

Mouvement uniformément accéléré : vitesses v_0 et v, accélération a, positions x_0 et x.
Exprimer v_0 puis x en fonction des autres grandeurs.

Réponse : $v_0 = \sqrt{v^2 - 2\,a\,(x - x_0)}$; $x = x_0 + \dfrac{v^2 - v_0^2}{2\,a}$

Exercice 19 – Énergie mécanique ★★★

$$E_m = \frac{1}{2}\,m\,v^2 + m\,g\,z$$

Énergie mécanique E_m d'un système de masse m, de vitesse v, à l'altitude z.
Exprimer v puis z en fonction des autres grandeurs.

Réponse : $v = \sqrt{\dfrac{2\,(E_m - m\,g\,z)}{m}}$; $z = \dfrac{E_m}{m\,g} - \dfrac{v^2}{2\,g}$

Exercice 20 – Choc mou ★★★

$$m_1\,v_1 + m_2\,v_2 = (m_1 + m_2)\,v'$$

Choc mou entre deux solides (quantité de mouvement conservée) : masses m_1 et m_2, vitesses avant le choc v_1 et v_2, vitesse commune v' après le choc.

Exprimer m_1 en fonction des autres grandeurs.

Réponse : $m_1 = \dfrac{m_2\,(v' - v_2)}{v_1 - v'}$

Exercice 21 – Rendement ★★★

$$\eta = \frac{P_u}{P_u + P_p}$$

Rendement η d'un convertisseur : puissance utile P_u, puissance perdue P_p.

Exprimer P_u puis P_p en fonction des autres grandeurs.

Réponse : $P_u = \dfrac{\eta\,P_p}{1-\eta}$; $P_p = \dfrac{P_u\,(1-\eta)}{\eta}$

Exercice 22 – Lentille mince ★★★

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

Relation de conjugaison d'une lentille mince convergente : distance focale f', positions algébriques de l'objet $\overline{OA}$ et de l'image $\overline{OA'}$.

Exprimer $\overline{OA'}$ puis $\overline{OA}$ en fonction des autres grandeurs.

Réponse : $\overline{OA'} = \dfrac{f'\,\overline{OA}}{f' + \overline{OA}}$; $\overline{OA} = \dfrac{f'\,\overline{OA'}}{f' - \overline{OA'}}$

Exercice 23 – Grandissement ★★★

$$\gamma = \frac{f'}{f' + \overline{OA}}$$

Grandissement γ d'une lentille mince convergente de distance focale f', objet situé en $\overline{OA}$.

Exprimer f' puis $\overline{OA}$ en fonction des autres grandeurs.

Réponse : $f' = \dfrac{\gamma\,\overline{OA}}{1-\gamma}$; $\overline{OA} = \dfrac{f'\,(1-\gamma)}{\gamma}$

Exercice 24 – Mélange de solutions ★★★

$$C = \frac{C_1 V_1 + C_2 V_2}{V_1 + V_2}$$

Mélange de deux solutions de même soluté : concentrations C_1 et C_2, volumes V_1 et V_2, concentration finale C.

Exprimer V_1 puis C_1 en fonction des autres grandeurs.

Réponse : $V_1 = \dfrac{V_2\,(C_2 - C)}{C - C_1}$; $C_1 = \dfrac{C\,(V_1 + V_2) - C_2 V_2}{V_1}$

D. Niveau Terminale

Exercice 25 – pH d'une solution ★★☆

$$\mathrm{pH} = -\log\left(\frac{[\mathrm{H_3O^+}]}{c^\circ}\right)$$

pH d'une solution, concentration standard c°.
Exprimer $[\mathrm{H_3O^+}]$ en fonction des autres grandeurs.

Réponse : $[\mathrm{H_3O^+}] = c^\circ \cdot 10^{-\mathrm{pH}}$

Exercice 26 – Pendule simple ★★☆

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Pendule simple : période T, longueur L, intensité de la pesanteur g.
Exprimer L puis g en fonction des autres grandeurs.

Réponse : $L = \frac{g\,T^2}{4\pi^2}$; $g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$

Exercice 27 – Constante d'acidité ★★☆

$$K_a = \frac{[\mathrm{A^-}]\,[\mathrm{H_3O^+}]}{[\mathrm{AH}]}$$

Constante d'acidité K_a du couple $\mathrm{AH/A^-}$ (à l'équilibre).
Exprimer $[\mathrm{AH}]$ puis $[\mathrm{H_3O^+}]$ en fonction des autres grandeurs.

Réponse : $[\mathrm{AH}] = \frac{K_a}{[\mathrm{A^-}]\,[\mathrm{H_3O^+}]}$; $[\mathrm{H_3O^+}] = \frac{K_a\,[\mathrm{AH}]}{[\mathrm{A^-}]}$

Exercice 28 – Acide faible ★★☆

$$K_a = \frac{x^2}{c - x}$$

Acide faible de concentration apportée c, dont x est la concentration en ions oxonium à l'équilibre ($x = [\mathrm{H_3O^+}]$).
Exprimer c en fonction des autres grandeurs.

Réponse : $c = \frac{x^2}{K_a} + x = \frac{x\,(x + K_a)}{K_a}$

Exercice 29 – Troisième loi de Kepler ★★☆

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G\,M}$$

Troisième loi de Kepler : période T, demi-grand axe a, masse M de l'astre attracteur, constante G.
Exprimer M puis a en fonction des autres grandeurs.

Réponse : $M = \frac{4\pi^2 a^3}{G\,T^2}$; $a = \left(\frac{G\,M\,T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$

Exercice 30 – Titrage ★★☆

$$\frac{C_A\,V_A}{a} = \frac{C_B\,V_E}{b}$$

Titrage à l'équivalence, avec $a\,\mathrm{A} + b\,\mathrm{B} \to \ldots$: V_A est le volume titré, V_E le volume versé à l'équivalence.
Exprimer C_B puis V_E en fonction des autres grandeurs.

Réponse : $C_B = \frac{b\,C_A\,V_A}{a\,V_E}$; $V_E = \frac{b\,C_A\,V_A}{a\,C_B}$

Exercice 31 – Effet Doppler ★★★

$$f_r = f_e \frac{c}{c - v}$$

Effet Doppler (source qui se rapproche) : fréquences reçue f_r et émise f_e, célérité c de l'onde, vitesse v de la source.
Exprimer v puis f_e en fonction des autres grandeurs.

Réponse : $v = c\left(1 - \frac{f_e}{f_r}\right)$; $f_e = f_r\left(1 - \frac{v}{c}\right)$

Exercice 32 – Décroissance radioactive ★★★

$$N(t) = N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

Décroissance radioactive : nombre de noyaux $N(t)$ à la date t, nombre initial N_0, constante radioactive λ.
Exprimer t puis λ en fonction des autres grandeurs.

Réponse : $t = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{N_0}{N}\right)$; $\lambda = \frac{1}{t}\ln\left(\frac{N_0}{N}\right)$

Exercice 33 – pH et pKa ★★★

$$\mathrm{pH} = \mathrm{p}K_a + \log\left(\frac{[\mathrm{A}^-]}{[\mathrm{AH}]}\right)$$

pH d'une solution contenant le couple AH/A^- de constante $\mathrm{p}K_a$.
Exprimer $[\mathrm{AH}]$ puis $\mathrm{p}K_a$ en fonction des autres grandeurs.

Réponse : $[\mathrm{AH}] = [\mathrm{A}^-]\cdot 10^{\mathrm{p}K_a - \mathrm{pH}}$; $\mathrm{p}K_a = \mathrm{pH} - \log\left(\frac{[\mathrm{AH}]}{[\mathrm{A}^-]}\right)$

Exercice 34 – Charge d'un condensateur ★★★

$$u_C(t) = E\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$$

Charge d'un condensateur : tension $u_C(t)$, tension E du générateur, constante de temps τ.
Exprimer t puis E en fonction des autres grandeurs.

Réponse : $t = -\tau\ln\left(1 - \frac{u_C}{E}\right)$; $E = \frac{u_C}{1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}}$

Exercice 35 – Refroidissement ★★★

$$T(t) = T_{ext} + (T_0 - T_{ext})\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

Refroidissement d'un corps : température $T(t)$, température initiale T_0, température extérieure T_{ext}, constante de temps τ.
Exprimer T_0 puis τ en fonction des autres grandeurs.

Réponse : $T_0 = T_{ext} + (T - T_{ext})\,\mathrm{e}^{t/\tau}$; $\tau = \frac{t}{\ln\left(\frac{T_0 - T_{ext}}{T - T_{ext}}\right)}$

Exercice 36 – Calorimétrie ★★★

$$m_1 c_1 (T_f - T_1) + m_2 c_2 (T_f - T_2) = 0$$

Mélange de deux corps dans un calorimètre (pas de pertes) : masses m, capacités thermiques massiques c, températures initiales T_1 et T_2, température finale T_f.
Exprimer T_f puis m_1 en fonction des autres grandeurs.

Réponse : $T_f = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$; $m_1 = \frac{m_2 c_2 (T_2 - T_f)}{c_1 (T_f - T_1)}$

Exercice 37 – Relation de Bernoulli ★★★

$$P_A + \rho\, g\, z_A + \frac{1}{2}\rho\, v_A^2 = P_B + \rho\, g\, z_B + \frac{1}{2}\rho\, v_B^2$$

Relation de Bernoulli entre deux points A et B d'un fluide incompressible : pressions P, altitudes z, vitesses v, masse volumique ρ.

Exprimer v_B puis z_A en fonction des autres grandeurs.

$z_A = z_B + \frac{P_B - P_A}{\rho\, g} + \frac{v_B^2 - v_A^2}{2\, g}$

Réponse : $v_B = \sqrt{v_A^2 + \frac{2\,(P_A - P_B)}{\rho} + 2\, g\,(z_A - z_B)}$

Exercice 38 – Équilibre chimique ★★★

$$K = \frac{[\mathrm{NH_3}]^2}{[\mathrm{N_2}]\,[\mathrm{H_2}]^3}$$

Constante d'équilibre K de la synthèse de l'ammoniac $\mathrm{N_2} + 3\,\mathrm{H_2} \rightleftharpoons 2\,\mathrm{NH_3}$ (concentrations à l'équilibre).

Exprimer $[\mathrm{H_2}]$ puis $[\mathrm{NH_3}]$ en fonction des autres grandeurs.

Réponse : $[\mathrm{H_2}] = \left(\frac{[\mathrm{NH_3}]^2}{K\,[\mathrm{N_2}]}\right)^{1/3}$; $[\mathrm{NH_3}] = \sqrt{K\,[\mathrm{N_2}]\,[\mathrm{H_2}]^3}$